Естественные науки

УДК 514.76

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОСКОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: glasirina@mail2000.ru

Статья является продолжением статьи “Распределение двум... в четырехмерном евклидовом пространстве” и посвящена геометрической интерпретации аналитических отображений $\phi_{\alpha^\alpha}, \varphi_{\alpha^\alpha} : \Lambda^\alpha_2 \to \Lambda^\beta_2$ и доказательству существования этих отображений.

1. Геометрические свойства отображений ϕ_{α^α} и φ_{α^α}

В статье [1, п. 3] даны геометрические свойства отображений ϕ_{α^ρ} и φ_{α^ρ}. Подробно эти свойства были выявлены в случае α=1. Геометрические же свойства этих отображений при α=2 получаются из геометрических свойств отображений ϕ_{1^ρ} и φ_{1^ρ} формальной заменой индексов $1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4$. Аналогичным образом поступим и для отображений ϕ_{α^ρ} и φ_{α^ρ} (см. определение 2.1 и [1, (2.7)]).

В соответствии с утверждениями 1 и 2 в [1, п. 2] отображения ϕ_{1^α} и φ_{1^α} обладают, в частности, теми же свойствами, что и отображения $\phi_{1^\rho}, \varphi_{1^\rho} : \Lambda^1_2 \to \Lambda^2_2$ (см. определение 2.1 и [1, (2.6)]). Однако в этом пункте выясним другие свойства отображений ϕ_{1^α} и φ_{1^α}.

1.1. Основные прямые в Λ^1_2

Определение 1.1. Прямая $\xi = (A, \bar{e}_\alpha)\xi^\alpha$ в плоскости $\Lambda^1_2 = (A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ типа [1, (1.4)], проходящая через точку $A \in E_4$, называется основной прямой, если ее образы при отображениях $\phi_1, \varphi_1 : \Lambda^1_2 \to \Lambda^2_2$ в плоскости Λ^1_2 типа [1, (1.6)] ортогональны.

Теорема 1.1. Через каждую точку $A \in E_4$ в плоскости Λ^1_2 проходят в общем случае не более четырех основных прямых в смысле определения 1.1.

Доказательство. Из [1, (2.1–2.2)] следует, что прямая $\xi \in \Lambda^1_2$ будет основной прямой тогда и только тогда, когда величины ξ^α удовлетворяют уравнениям:

$$h_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} x^{\alpha_3} x^{\alpha_4} = 0, \; x^{\hat{\alpha}} = 0,$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 1,2), \qquad (1.1)$$

$h_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ – симметрические по всем индексам величины определяются по формулам:

$$\begin{aligned} &h_{1111} = -A^3_{11}A^3_{21} - A^4_{11}A^4_{21}, \; h_{2222} = A^3_{22}A^3_{12} + A^4_{22}A^4_{12}, \\ &h_{1112} = A^3_{11}\left(A^3_{22} - A^3_{11}\right) - A^3_{21}\left(A^3_{12} + A^3_{21}\right) + \\ &+A^4_{11}\left(A^4_{22} - A^4_{11}\right) - A^4_{21}\left(A^4_{12} + A^4_{21}\right), \\ &h_{2221} = A^3_{22}\left(A^3_{22} - A^3_{11}\right) + A^3_{12}\left(A^3_{12} + A^3_{21}\right) + \\ &+A^4_{22}\left(A^4_{22} - A^4_{11}\right) + A^4_{12}\left(A^4_{12} + A^4_{21}\right), \\ &h_{1122} = A^3_{12}A^3_{22} - A^3_{11}A^3_{21} + A^4_{22}A^4_{12} - A^4_{21}A^4_{11}. \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Из (1.1) с учетом (1.2) вытекает справедливость теоремы 1.1.

1.2. Канонизация ортонормального репера R

Для упрощения дальнейших геометрических и аналитических рассуждений проведем в каждой точке $A \in E_4$ такую канонизацию ортонормального репера R, при которой

$$A^3_{22} = 0, \; A^4_{12} = 0,$$
$$\left(A^3_{21} + A^3_{12}\right)A^3_{12} + \left(A^4_{11} - A^4_{22}\right)A^4_{22} \neq 0. \qquad (1.3)$$

Из дифференциальных уравнений [1, (1.5)] убеждаемся в том, что 1-формы ω^2_1 и ω^4_3 являются главными:

$$\omega^2_1 = A^2_{1i}\omega^i, \omega^4_3 = A^4_{3i}\omega^i. \qquad (1.4)$$

Поэтому в соответствии с [2] канонизация ортонормального репера R типа (1.3) существует. Из (1.1) и (1.2) в силу (1.3) следует, что при указанной канонизации репера R прямая $l^2_1 = (\bar{A}, \bar{e}_2)$ является основной прямой, а прямая $l^4_1 = (\bar{A}, \bar{e}_4)$ в L^2_2 является образом

прямой l_1^2 при отображении $f_1 : L_2^1 \to L_2^2$. При этом из рассмотрения исключается случай $h_{2221} = 0$, когда прямая l_1^2 является двойной основной прямой.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.2. Если отображения $f_{1r}, \varphi_{1r} : L_2^1 \to L_2^2$ в каждой точке $A \in E_4$ являются гармоническими $(f_1 \to f_{1r}, \varphi_1 \to \varphi_{1r})$, то основные прямые в плоскости L_2^1, проходящие через точку А, состоят из двух пар ортогональных прямых, сопряженных относительно друг друга.

Доказательство. Из (1.1) и (1.2) в силу (1.3) и [1, (2.6)] получаем, что в случае отображений f_{1r} и φ_{1r} основными прямыми в точке А плоскости L_2^1 являются

$$l_1^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1),\ l_1^2 = (\bar{A}, \bar{e}_2),\ l_1^{\pm} = (\bar{A}, \bar{e}_1 \pm \bar{e}_2),$$

что и доказывает настоящую теорему.

Теорема 1.3. Если отображение $f_1(\varphi_1) : L_2^1 \to L_2^2$ в каждой точке $A \in E_4$ является отображением $f_{1a}(\varphi_{1a})$, то прямые l_1^1 и l_1^2 являются основными прямыми, две другие основные прямые в плоскости L_2^1 сопряжены относительно l_1^1 и l_1^2, т.е. составляет вместе с ними гармоническую четверку.

Доказательство этой теоремы вытекает из (1.1–1.3):

$$f_1 \to f_{1a} \Leftrightarrow A_{22}^3 = A_{11}^3 = A_{12}^4 = A_{21}^4 = 0,$$

$$A_{12}^3 + A_{21}^3 = -A_{11}^4 \neq 0 \overset{(1.1-1.3)}{\Rightarrow}$$

$$x^1 x^2 \left\{ (A_{21}^3 - A_{11}^4)(x^1)^2 + (A_{12}^3 + A_{11}^4)(x^2)^2 \right\} = 0; \quad (1.5)$$

$$\varphi_1 \to \varphi_{1a} \Leftrightarrow A_{12}^3 = A_{21}^3,\ A_{12}^4 = A_{21}^4 = 0,$$

$$A_{11}^3 = A_{22}^3, A_{11}^4 - A_{22}^4 = -2A_{12}^3 \neq 0 \overset{(1.1-1.3)}{\Rightarrow}$$

$$x^1 x^2 \left\{ (A_{11}^4 - A_{12}^3)(x^1)^2 + (A_{22}^4 + A_{12}^3)(x^2)^2 \right\} = 0. \quad (1.6)$$

1.3. Случай $f_{1a} \cup \varphi_{1a}$

При построении канонического ортонормального репера R типа (1.3) из рассмотрения исключается случай $f_{1a} \cup \varphi_{1a}$, когда в каждой точке $A \in E_4$ отображения f_1 и φ_1 являются одновременно отображениями f_{1a} и φ_{1a}. Из [1, (2.7)] следует, что рассматриваемый случай характеризуется соотношениями:

$$A_{21}^3 = A_{12}^3 = A_{22}^4 = -A_{11}^4 = a,$$

$$A_{12}^4 = A_{21}^4 = -A_{22}^3 = A_{11}^3 = b. \quad (1.7)$$

Из (1.1–1.3) с учетом (1.5), (1.6) и [1, п. 3.2] вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.4. Если отображения $f_1, \varphi_1 : L_2^1 \to L_2^2$ в каждой точке $A \in E_4$ является одновременно отображениями f_{1a}, φ_{1a}, то выполняются следующие свойства:

1) коника $K_2^{12} \subset L_2^2$ является окружностью с центром в точке $A \in E_4$ и радиуса $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$;

2) основные прямые в плоскости L_2^1 не определены, т.е. любая прямая в L_2^1, проходящая через точку А, является основной прямой.

$\varphi_{\alpha a}\ (\alpha = 1,2)$ отображений $f_{\alpha r}, \varphi_{\alpha r}, f_{\alpha a}$ и

Прежде всего заметим, что распределение $\Delta_{2,4}^1 : A \to L_2^1$ в E_4, о котором идет речь в [1, п. 1], представляет собой четырехпараметрическое многообразие $V_{2,4}^1$ двумерных плоскостей L_2^1, проходящих через соответствующие точки $A \in E_4$.

Определение 2.1. Многообразием $V_{2,4}^{1\alpha r}$ (α = 1, 2; α – фиксировано) называется распределение $\Delta_{2,4}^1$, для которого отображение $f_\alpha : L_2^\alpha \to L_2^\beta\ (\alpha, \beta = 1,2;\ \alpha \neq \beta)$ является отображением $f_{\alpha r}\ (f \to f_{\alpha r})$. Аналогично определяются

$$V_{2,4}^{1\alpha a}(f_\alpha) \Leftrightarrow f_\alpha \to f_{\alpha a},$$

$$V_{2,4}^{1\alpha r}(\varphi_\alpha) \Leftrightarrow \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha r},$$

$$V_{2,4}^{1\alpha a}(\varphi_\alpha) \Leftrightarrow \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha a},$$

$$V_{2,4}^{1\alpha r}(f_\alpha, \varphi_\alpha) \Leftrightarrow f_\alpha \to f_{\alpha r},\ \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha r},$$

$$V_{2,4}^{1\alpha a}(f_\alpha, \varphi_\alpha) \Leftrightarrow f_\alpha \to f_{\alpha a},\ \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha a},$$

$$V_{2,4}^{1a} \Leftrightarrow f_1 \to f_{1a},\ \varphi_1 \to \varphi_{1a},\ f_2 \to f_{2a}, \varphi_2 \to \varphi_{2a}. \quad (2.1)$$

Заметим, что геометрические свойства многообразий, о которых идет речь в определении 2.1, см. (2.1), изучены в п. 1 и в [1, п. 3]. В частности, в соответствии с теоремой 2.1 [1] для многообразия $V_{2,4}^{1a}$ распределения $\Delta_{2,4}^\alpha : A \to L_2^\alpha\ (\alpha = 1,2)$ голономны.

Из (2.1) следует, что многообразие $V_{2,4}^{1a}$ является частным случаем всех многообразий, о которых идет речь в определении 2.1. Поэтому, если многообразие $V_{2,4}^{1a}$ существует, то все остальные многообразия 2.1 также существуют.

Теорема 2.1. Многообразие $V_{2,4}^{1a}$ в E_4 существует и определяется с произволом двух функций четырех аргументов.

Доказательство существования многообразия $V_{2,4}^{1a}$ проведем методом Кэлера [3].

В соответствии с определением 2.1, (2.1), (1.7) и [1, (2.7)] заключаем, что многообразие $V_{2,4}^{1a}$ характеризуется конечными соотношениями:

$$A_{21}^3 = A_{12}^3 = A_{22}^4 = -A_{11}^4 = a,$$

$$A_{12}^4 = A_{21}^4 = -A_{22}^3 = A_{11}^3 = b;$$

$$A_{43}^1 = A_{34}^1 = A_{44}^2 = -A_{33}^2 = a^*,$$

$$A_{34}^2 = A_{43}^2 = -A_{44}^1 = A_{33}^1 = b^*. \quad (2.2)$$

Из дифференциальных уравнений [1, (1.5)] с учетом (2.2) получаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины a, b, a^* и b^*:

$$da - b(2\omega_1^2 - \omega_3^4) = a_i \omega^i,$$

$$db + a(2\omega_1^2 - \omega_3^4) = b_i \omega^i,$$

$$da^* - b^*(2\omega_3^4 - \omega_1^2) = a_i^* \omega^i,$$

$$db^* + a^*(2\omega_3^4 - \omega_1^2) = b_i^* \omega^i, \quad (2.3)$$

где явный вид величин, стоящих при ω^i, для нас несущественный.

Дифференциальные уравнения (2.3) позволяют провести следующую канонизацию ортонормального репера R:

$$a = 0,\ a^* = 0,\ b \neq 0,\ b^* \neq 0.$$

Тогда из (2.3) получаются дифференциальные уравнения типа (1.4), где

$$A^2_{1'} = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\beta}\alpha_{'} + \frac{1}{\beta_*}\alpha_{*'}\right),$$

$$A^4_{3'} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\beta}\alpha_{'} + \frac{2}{\beta_*}\alpha_{*'}\right), \qquad (2.4)$$

а значит в соответствии с [2] канонизация ортонормального репера R типа (2.4) существует. Из [1, (1.5)] $V^{1a}_{2,4}$ етом (2.2–2.5) и (1.4) следует, что многообразие (2.5) характеризуется в терминах построенного канонического репера R дифференциальными уравнениями:

$$\omega^3_1 = \omega^4_2 = b\omega^1 - b^*\omega^3,$$

$$\omega^4_1 = -\omega^3_2 = b\omega^2 + b^*\omega^4,$$

$$\omega^2_1 = A^2_{1i}\omega^i, \ \omega^4_3 = A^4_{3i}\omega^i.$$

Продолжение первых двух дифференциальных уравнений в (2.6) приводит к дифференциальным уравнениям:

$$db = b_i\omega^i, \ db^* = b^*_i\omega^i,$$

где (2.6)

$$b_1 = a_2, \ b_2 = -a_1, \ b_3 = -a_4, \ b_4 = a_3,$$

$$b^*_1 = a^*_2, \ b^*_2 = a^*_1, \ b^*_3 = a^*_4, \ b^*_4 = -a^*_3,$$

причем величины a_i и a^*_i в силу (2.3) и (2.4) определяются по формулам

$$a_i = \left(A^4_{3i} - 2A^2_{1i}\right)b, \ a^*_i = \left(A^2_{1i} - 2A^4_{3i}\right)b^*. \qquad (2.7)$$

Заметим также, что при продолжении указанных дифференциальных уравнений возникают следующие конечные соотношения: (2.8)

$$a_3 = a^*_1, \ b^2 - a_4 + b^{*2} - a^*_2 = 0.$$

Замыкание дифференциальных уравнений (2.7) и (2.6) приводит к четырем квадратичным внешним уравнениям вида: (2.9)

$$\left(db_i - b_k\omega^k_i\right)\wedge\omega^i = 0, \ \left(db^*_i - b^*_k\omega^k_i\right)\wedge\omega^i = 0,$$

$$\left(dA^2_{1j} - A^2_{1k}\omega^k_j - C^2_{1ji}\omega^i\right)\wedge\omega^j = 0,$$

$$\left(dA^4_{3j} - A^4_{3k}\omega^k_j - C^4_{3ji}\omega^i\right)\wedge\omega^j = 0, \qquad (2.10)$$

где

$$C^4_{3ij} = -C^2_{1ij}, \ C_{1[ij]2} = 0, \ C^2_{112} = 2b^2, \ C^2_{113} = 0,$$

$$C^2_{114} = 2bb^*, \ C^2_{123} = 2bb^*, \ C^2_{124} = 0, \ C^2_{134} = -2b^{*2}.$$

Из квадратичных уравнений (2.11) по лемме Картана получаются дифференциальные уравнения: (2.11)

$$db_i - b_k\omega^k_i = b_{ij}\omega^j, \ db^*_i - b^*_k\omega^k_i = b^*_{ij}\omega^j,$$

$$dA^2_{1j} - A^2_{1k}\omega^k_j - C^2_{1ji}\omega^i = \overset{*}{A}{}^2_{1ji}\omega^i,$$

$$dA^4_{3j} - A^4_{3k}\omega^k_j - C^4_{3ji}\omega^i = \overset{*}{A}{}^4_{3ji}\omega^i,$$

где

$$b_{[ij]} = 0, b^*_{[ij]} = 0, \overset{*}{A}{}^2_{1[ji]} = 0, \overset{*}{A}{}^4_{3[ji]} = 0.$$

Поскольку ортонормальный репер R канонический, то

$$\omega^k_j = A^k_{ji}\omega^i, \ (j \neq k).$$

Положим

$$dA^2_{1j} = A^2_{1ji}\omega^i, \ dA^4_{3j} = A^4_{3ji}\omega^i,$$

тогда из (2.12) с учетом (2.14) и (2.15) получаем:

$$A^2_{1ji} = \overset{*}{A}{}^2_{1ji} + A^2_{1k}A^k_{ji} + C^2_{1ji}, A^2_{1[ji]} = 0,$$

$$A^2_{1ji} = \overset{*}{A}{}^4_{3ji} + A^4_{3k}A^k_{ji} + C^4_{3ji}, \overset{*}{A}{}^4_{3[ji]} = 0. \qquad (2.12)$$

Дифференцируя конечные соотношения (2.10) и пользуясь при этом соотношениями (2.7) и (2.9), с учетом (2.16) получаем следующие конечные соотношения:

$$a_{3j} = a^*_{1j}, \ 2bb_j - a_{4j} + 2b^*b^*_j - a^*_{2j} = 0, \qquad (2.13)$$

где

$$\alpha_{'\varphi} = \beta\left(A^4_{3'\varphi} - 2A^2_{1'\varphi}\right) + \beta_\varphi\left(A^4_{3'} - 2A^2_{1'}\right),$$

$$\alpha_{*'\varphi} = \beta_*\left(A^2_{1'\varphi} - 2A^4_{3'\varphi}\right) + \beta_{*\varphi}\left(A^2_{1'} - 2A^4_{3'}\right). \qquad (2.14)$$

Заметим, что соотношения (2.16) получены из внешних квадратичных дифференциальных уравнений (2.15) (2.11) после подстановки в них соотношений (2.15).

Учитывая соотношения (2.13), (2.16) и (2.17), получаем число N независимых параметров наиболее общего элемента, которое равно (2.16)

N = 4·10–8=32.

…егральную цепь по формам базиса $\left[\omega^1\omega^2\omega^3\omega^4\right]$. Пользуясь соотношениями (2.12),

$\tilde{E}_1\left(\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0\right), \tilde{E}_2\left(\omega^3 = \omega^4 = 0\right), \tilde{E}_3\left(\omega^4 = 0\right)$ (2.17)

$\tilde{E}_4$ опред… $\rho_1 = 14, \rho_2 = 10, \rho_3 = 6, \rho_4 = 2.$ …енно

Поэтому число Картана равно

$$Q = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 14 + 10 + 6 + 2 = 32.$$

Таким образом, с учетом (2.18) имеем N = Q. Это означает, что система дифференциальных уравне… $V^{1a}_{2,4}$ (2.7) и (2.12) в иволюции, а поэтому многообраз… $r_4 = 2$ в E_4 существует и определяется с произволом функций четырех аргументов. Теорема 2.1 дока… $\Delta^1_{2,4}$

…амечание 2.1. Поскольк… $V^{1a}_{2,4}$ спределения $\Delta^1_{2,4}$ и $\Delta^2_{2,4}$ в случае $V^{1a}_{2,4}$ …гообразия $V^{1a}_{2,4}$ в E_4 голономны, то (2.18) многообразие E_4 расслаивается на двумерные …ер…ости S^1_2 и S^2_2 с касательными плоскостями L^1_2 и L^2_2 в точке A, соответственно.

Замечание 2.2. Из (2.6–2.8) в силу [1, (1.1)] следует, что в случае многообразия $V^{1a}_{2,4}$ существуют два голо- н… $\overset{*}{\Delta}{}^1_{2,4} : \bar{A} \to \overset{*}{L}{}^1_2 = \left(\bar{A}, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\right)$ $\overset{*}{\Delta}{}^2_{2,4} : \bar{A} \to \overset{*}{L}{}^2_2 = \left(\bar{A}, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_4\right) \perp \overset{*}{L}{}^1_2$, $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{e}_1 - \frac{b}{b^*}\bar{e}_3$, $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{e}_2 + \frac{b}{b^*}\bar{e}_4$, $\bar{\varepsilon}_3 = \bar{e}_3 - \frac{b^*}{b}\bar{e}_1$, $\bar{\varepsilon}_4 = \bar{e}_4 - \frac{b^*}{b}\bar{e}_2$. При этом плоскости L^1_2 и L^2_2 изменяются параллельно самим себе вдоль $\overset{*}{\Delta}{}^1$ …граль… $\overset{*}{\Delta}{}^2$ …ривых $\omega^3_1 = 0, \ \omega^4_1 = 0$ распределения $\Delta_{2,4}$ или $\Delta_{2,4}$, описываемых точкой A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. Распределение двумерных плоскостей в четырехмерном эвклидовом пространстве

// Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 6. – С. 5–7.

2. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

УДК 530.12:531.51